Chapitre F

Application à la résolution d'EDP

Dans ce chapitre nous donnons quelques exemples de résolution d'EDP par les méthodes décrites dans ce cours.

F.1. Le problème de Dirichlet homogène

Dans ce paragraphe nous considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, dont la frontière est notée Γ et nous supposons pour simplifier que Ω est de classe C^∞.

F.1.1. Résolution du problème de Dirichlet. Nous cherchons une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned} -\Delta u + au &= g\,, \quad x \in \Omega \\ u &= 0\,, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \tag{F.1}$$

avec $a \in C(\overline{\Omega})$ et $a \geq 0$ dans Ω, où l'on rappelle que

$$\Delta := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace. La fonction g est donnée, la condition aux bords $u(x) = 0$ si $x \in \Gamma$ est la condition aux limites de Dirichlet.

Définition F.1.1. *Une solution classique de* (F.1) *est une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant* (F.1)*. Une solution faible de* (F.1) *est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega auv \, dx = \int_\Omega gv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Remarque. On vérifie facilement que toute solution classique est une solution faible.

Théorème F.1.2. *Pour tout $g \in L^2(\Omega)$ il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution faible de* (F.1)*. De plus u s'obtient par le principe de Dirichlet : il vérifie*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + au^2\right) dx - \int_\Omega gu \, dx = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + av^2\right) dx - \int_\Omega gv \, dx \right\}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram (et l'inégalité de Poincaré de la Proposition C.7.15) dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$ avec la forme bilinéaire

$$A(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega auv \, dx$$

et la forme linéaire

$$f(v) := \int_\Omega gv \, dx\,.$$

Le théorème est démontré. $\square$

Remarque. On peut démontrer (et c'est difficile, ce sera admis ici) que la solution construite ci-dessus vérifie en fait que $u \in H^2(\Omega)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\|g\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Plus généralement

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \le C\|g\|_{H^m(\Omega)}\,.$$

et en particulier si $m > d/2$ alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

F.1.2. Fonctions propres et décomposition spectrale.

Théorème F.1.3. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite de réels strictement positifs tendant vers l'infini $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

et e_n est solution faible de

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \text{dans} \quad \Omega\,. \tag{F.2}$$

On dit que les λ_n sont les valeurs propres de $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet, et que les e_n sont les fonctions propres associées.

Démonstration. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on note $u = Tf$ l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ (voir le Théorème F.1.2) du problème

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

On considère T comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et on vérifie (grâce à l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, voir le Théorème C.7.19) que T est un opérateur auto-adjoint compact. Par ailleurs on a $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ et

$$\forall f \in L^2(\Omega)\,, \quad (Tf|f)_{L^2(\Omega)} \ge 0\,.$$

Grâce à la Proposition D.3.3 et au Théorème D.3.5 on obtient que $L^2(\Omega)$ admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de vecteurs propres de T associés à des valeurs propres $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mu_n > 0$ et $\mu_n \to 0$ quand n tend vers l'infini. On a donc $e_n \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v\, dx = \frac{1}{\mu_n}\int_\Omega e_n v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Donc e_n est une solution faible de (F.2) avec $\lambda_n = \mu_n^{-1}$. Le théorème est démontré. □

Remarque. La régularité elliptique évoquée au paragraphe précédent permet de montrer que $e_n \in C^\infty(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

F.2. L'équation de la chaleur dans un domaine borné

Dans ce paragraphe nous considérons comme au paragraphe précédent Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On note Γ sa frontière. Nous cherchons à résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = 0\,, &\quad t \in \mathbb{R}^+\,, \quad x \in \Omega \\ u = 0\,, &\quad t \in \mathbb{R}^+\,, \quad x \in \Gamma \\ u(0,x) = u_0(x)\,, &\quad x \in \Omega\,. \end{aligned} \tag{F.3}$$

La condition $u(t,x)=0$ si $x\in\Gamma$ signifie que la température au bord est maintenue nulle. On pourrait considérer la condition de Neumann exprimant la nullité du flux de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0\,,\quad x\in\Gamma$$

où n est le vecteur normal unitaire extérieur à Γ, ou encore d'autres conditions aux limites que nous ne détaillerons pas ici.

F.2.1. Méthode variationnelle.

Théorème F.2.1. *Soit $u_0\in L^2(\Omega)$. Il existe une unique fonction $u:(t,x)\mapsto u(t,x)$ vérifiant* (F.3) *et telle que*

$$u\in C\big(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega)\big)\cap C\big(\mathbb{R}^+\setminus\{0\};H^2\cap H_0^1(\Omega)\big)\cap C^1\big(\mathbb{R}^+\setminus\{0\};L^2(\Omega)\big)\,. \tag{F.4}$$

Enfin $u\in L^2\big(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega)\big)$ et l'on a pour tout $T>0$

$$\frac12\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt=\frac12\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{F.5}$$

Démonstration. On applique la théorie de Hille-Yosida dans l'espace $H=L^2(\Omega)$ en considérant l'opérateur non borné A de domaine $D(A):=H^2\cap H_0^1(\Omega)\subset H$ défini par

$$Au:=-\Delta u\,.$$

La monotonie de A provient de

$$(Au|u)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega-\Delta u\,u\,dx=\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\geq 0\,.$$

Le fait que A soit maximal monotone provient du fait que

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}+A)=L^2(\Omega)\,,$$

et cela est dû au Théorème F.1.2. Pour montrer que A est auto-adjoint il suffit par la Proposition E.2.1 de vérifier qu'il est symétrique, ce qui provient d'une simple intégration par parties. On peut donc appliquer le Théorème E.2.2 qui donne directement l'existence et l'unicité de u vérifiant (F.4).

Pour obtenir l'égalité d'énergie (F.5) il faut prendre garde au fait que $t\mapsto u(t)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ seulement. La fonction

$$\varphi(t):=\frac12\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ et

$$\forall t>0\,,\quad \varphi'(t)=\Big(u(t)|\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_{L^2(\Omega)}=\big(u(t)|\Delta u\big)_{L^2(\Omega)}=-\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Si $0<\delta<T<\infty$ on a donc

$$\varphi(T)-\varphi(\delta)=\int_\delta^T\varphi'(t)\,dt=-\int_\delta^T\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\,.$$

Le résultat suit du fait que

$$\varphi(\delta)\to\frac12\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\,,\quad \delta\to 0\,.$$

Le théorème est démontré. □

Remarque. La régularité elliptique évoquée en Remarque F.1.1 permet de montrer que $u\in C^\infty([\delta,\infty[\times\overline{\Omega})$ pour tout $\delta>0$.

F.2.2. Méthode spectrale. On sait par le Théorème F.1.3 qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $-\Delta$ avec condition au bord de Dirichlet. On cherche alors une solution de (F.3) sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(t)e_n(x)$$

et on a nécessairement

$$\frac{da_n}{dt} + \lambda_n a_n = 0$$

et donc

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n t}$$

avec les $a_n(0)$ déterminés par

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(0)e_n(x)\,.$$

Il reste alors à expliciter la convergence de la série, la régularité de u etc.

F.3. L'équation de la chaleur dans l'espace entier

On cherche une distribution $E_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ telle que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\Big)E_d = \delta_{(0,0)} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x\,. \tag{F.6}$$

On suppose que le support de E_d est dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$. On note $\widehat{E}_d(t,\xi)$ la transformée de Fourier partielle de E_d en la variable x : elle est définie par la formule

$$\langle \widehat{E}_d, \varphi\rangle := \langle \mathcal{F}_x E_d, \varphi\rangle := \langle E_d, \mathcal{F}_x\varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)\,.$$

On vérifie sans difficulté que le membre de droite de l'égalité ci-dessus définit bien une distribution tempérée sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$. On montre facilement que la transformée de Fourier partielle est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ sur lui-même, dont l'inverse est donné par la formule

$$\langle \mathcal{F}_x^{-1} E_d, \varphi\rangle = \langle E_d, \mathcal{F}_x^{-1}\varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)\,,$$

ou encore

$$\mathcal{F}_x^{-1} E_d = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}_x E_d \circ J\,, \quad J : (t,x) \mapsto (t,-x)\,.$$

Théorème F.3.1. *Pour tout $d \geq 1$ posons*

$$E_d(t,x) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Alors E_d est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$, supportée dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$ et vérifiant (F.6). *Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est*

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Démonstration. La formule définissant E_d montre que E_d est continue sur $\mathbb{R}_t \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^d_x$, à support dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$ et vérifie

$$\forall t > 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^d} E_d(t,x)\,dx = 1\,.$$

En particulier puisque E_d est positive ou nulle, on a

$$E_d \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$$

donc elle définit bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$. Par ailleurs la formule donnant la transformée de Fourier de la Gaussienne (voir l'exercice page 65) montre que sa transformée de Fourier partielle en x est

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \mathbf{1}_{t>0} \, .$$

On a alors grâce à la formule de Leibniz (voir la Proposition B.4.10)

$$\begin{aligned}(\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\widehat{E}_d &= e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \partial_t(\mathbf{1}_{t>0} \otimes 1) \\ &= e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} (\delta_{t=0} \otimes 1) \\ &= \delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \, .\end{aligned}$$

Mais $E_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ donc $\widehat{E}_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$. Les distributions tempérées $(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}|\xi|^2)\widehat{E}_d$ et $\delta_{t=0} \otimes 1$ sont égales en tant qu'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, et donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$.

En prenant la transformée de Fourier partielle inverse on trouve

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_d = \delta_{t=0} \otimes \delta_{x=0} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \, .$$

Reste à démontrer l'unicité de la solution. Supposons qu'il existe une autre distribution tempérée $\widetilde{E}_d$ vérifiant les mêmes propriétés que E_d, et soit $F_d := E_d - \widetilde{E}_d$. Le fait que $F_d \equiv 0$ est une conséquence directe du lemme ci-dessous. □

Lemme F.3.2. *Soit $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que*

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta)F = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$$

avec F supportée dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$. Alors $F \equiv 0$.

Démonstration. En notant τ la variable de Fourier en temps et en notant $\mathcal{F}F$ la transformée de Fourier en (t,x) de F on a

$$(i\tau + \frac{1}{2}|\xi|^2)\mathcal{F}F = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \, .$$

Mais alors en multipliant cette égalité par $-i\tau + \frac{1}{2}|\xi|^2$ il vient

$$(\tau^2 + \frac{1}{4}|\xi|^4)\mathcal{F}F = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \, ,$$

donc $\mathcal{F}F$ est une distribution à support dans $(0,0)$. On sait par le Théorème B.4.5 que $\mathcal{F}F$ est une combinaison linéaire finie de la masse de Dirac en $(0,0)$ et de ses dérivées : on peut écrire

$$\mathcal{F}F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{(0,0)} \, .$$

Mais alors

$$F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}} \tilde{a}_\alpha t^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

c'est-à-dire que F est un polynôme. Comme on a supposé que F est identiquement nulle pour $t < 0$ on conclut que $F \equiv 0$. Le lemme est démontré. □

F.4. L'équation de Schrödinger dans l'espace entier

Comme pour l'équation de la chaleur dans le paragraphe précédent, on cherche une distribution $E_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ telle que

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta)E_d = i\delta_{(0,0)} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,. \tag{F.7}$$

On suppose que le support de E_d est dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$. On note $\widehat{E}_d(t,\xi)$ la transformée de Fourier partielle de E_d en la variable x.

Théorème F.4.1. *Pour tout $d \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ posons*

$$E^\varepsilon_d(t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(\varepsilon+i)t}^{\,d}} e^{-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+i)t}} \mathbf{1}_{t>0}\,,$$

où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors

$$E^\varepsilon_d \longrightarrow E_d \quad \textit{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$$

où E_d est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$, supportée dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$ et vérifiant (F.7). *Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est*

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{it|\xi|^2}{2}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Remarque. Par abus on note souvent

$$E_d(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi t}^{\,d}} e^{-\frac{|x|^2}{2it}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme F.4.2 (Transformée de Fourier des Gaussiennes complexes)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$ et posons*

$$G_d(x,z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi z}^{\,d}} e^{-\frac{|x|^2}{2z}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,,$$

où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors la transformée de Fourier en x de G_d est la fonction définie par

$$\widehat{G}_d(\xi,z) = e^{-\frac{z|\xi|^2}{2}}\,.$$

Démonstration. La fonction $(x,z) \mapsto G_d(x,z)$ est continue sur $\mathbb{R}^d \times \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 0\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,, \quad |G_d(x,z)| = \frac{1}{(2\pi|z|)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\operatorname{Re} z\,|x|^2}{2|z|^2}}\,.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\operatorname{Re} z > a, |z| \leq R} |G_d(x,z)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{a|x|^2}{2R^2}}\,dx = \frac{R^d}{a^d}\,\cdot$$

Comme la fonction $z \mapsto G_d(x,z)$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 0\}$ on en déduit que

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} G_d(x,z)\,dx \quad \text{est holomorphe dans} \quad \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 0\}\,.$$

Cette fonction coïncide, lorsque z parcourt $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, avec

$$z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z|\xi|^2}$$

qui est également holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 0\}$. Par le Théorème des zéros isolés on en déduit qu'elles coïncident sur l'ouvert connexe $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 0\}$. □

Revenons à la démonstration du Théorème F.4.1. On a comme dans le cas de l'équation de la chaleur

$$(i\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\widehat{E}_d = \delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

En multipliant par $e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ il vient

$$\begin{aligned} i\partial_t(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\widehat{E}_d) &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}(i\partial_t\widehat{E}_d + \frac{1}{2}|\xi|^2\widehat{E}_d) \\ &= ie^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\delta_{t=0} \otimes 1 \qquad\qquad = i\delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,. \end{aligned}$$

Mais alors au vu de la condition sur le support de $\widehat{E}_d$ il vient

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\widehat{E}_d = \mathbf{1}_{t>0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

En multipliant à nouveau par $e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy pour $\widehat{E}_d$ est donnée par

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = \mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$$

qui est mesurable et bornée, et définit donc bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. La transformée de Fourier partielle inverse fournit la solution du problème initial, reste à montrer que c'est la limite de E_d^ε quand ε tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$|E_d^\varepsilon(t,x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1+\varepsilon^2)}^d}\mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2t(1+\varepsilon^2)}}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d}|E_d^\varepsilon(t,x)|\,dx = \frac{(1+\varepsilon^2)^{\frac{d}{2}}}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

On a donc $E_d^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$ et donc $E_d^\varepsilon \in d\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le Lemme F.4.2 on a

$$\widehat{E}_d^\varepsilon(t,\xi) = \mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{t|\xi|^2}{2(i+\varepsilon)}}$$

donc par convergence dominée

$$\widehat{E}_d^\varepsilon \to \widehat{E}_d \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

La transformée de Fourier partielle inverse étant continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ on en déduit le résultat cherché. $\square$

Bibliographie

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer **343**, 2011.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Classics in Mathematics, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer **132**, 2011.

[4] W. Rudin, *Functional analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[5] C. Zuily, *Distributions et équations aux dérivées partielles*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, second edition, 1986.

Ces notes s'inspirent également de notes de cours disponibles en ligne de G. Carlier, F. Golse, F. Paulin, Th. Ramond, J. Saint-Raymond, L. Saint-Raymond.

Index